Mathematik-Prüfungstraining

1. Thema: Bruchrechnung und Auflösen von Gleichungen

0. Allgemeines zu Termumformungen

a) Reihenfolge: Klammern vor Potenz vor Punkt vor Strich, und die Klammern von innen nach außen auflösen!
Unterscheide insbesondere $-x^2$ (negative Zahl) und $(-x)^2 = \left((-1)\cdot x\right)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = 1 \cdot x^2$ (positive Zahl)
<u>Bsp:</u> $-(-(-x)^2) = -(-x^2) = +x^2$ ⇨ von innen nach außen: $x \Rightarrow -x \Rightarrow (-x)^2 = x^2 \Rightarrow -x^2 \Rightarrow -(-x^2) = +x^2$

b) Beim Ausmultiplizieren Distributivgesetz beachten: $(a+b)\cdot c = ac + bc$
Beim Multiplizieren von Summen: Jeder mit jedem: $(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$

c) Binomische Formeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ / $(a-b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$ / $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Häufiger Fehler: $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ und erst recht nicht bei höheren Potenzen: $(a+b)^3 \neq a^3 + b^3$ sondern
$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Eigentlich reicht es, sich nur die erste und dritte bin. F. zu merken und immer die Vorzeichen mitzunehmen:
$(a-b)^2 = \left(a + (-b)\right)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ / $(-a+b)^2 = (b-a)^2 =$ (s.u.)
$(-a-b)^2 = \left(-(a+b)\right)^2 = (-1)^2(a+b)^2 = (a+b)^2$ / $(b-a)^2 = \left(-(-b+a)\right)^2 = \left(-(a-b)\right)^2 = (a-b)^2$

d) Beim Potenzieren von Produkten und Quotienten gilt die Potenz für jeden Faktor (Dividend & Divisor):
$(xy)^a = x^a y^a$, $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$, $(x \pm y)^a \neq x^a \pm y^a$ (siehe z.B. für $a = 2$ die binomischen Formeln!)
Für das Potenzieren von Summen gibt es keine einfache Regel, sondern hier muss ausmultipliziert werden! ⇨ 1 l)
<u>Bsp:</u> $(-2xy)^2 = (-2)^2 \cdot x^2 \cdot y^2 = 8x^2y^2$ / $\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{(a+b)^3}{b} = \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{b} = \frac{a^3}{b} + 3a^2 + 3ab + b^2$
Umgekehrt können die Potenzen zur *gleichen Basis* additiv zusammengefasst werden: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
Potenzen von Potenzen: $(x^a)^b = x^{a\cdot b} = x^{b \cdot a} = (x^b)^a$ / $x^0 = 1$ für alle x. Insbesondere wird meist $0^0 := 1$ definiert.
<u>Bsp:</u> $\frac{x^2 \cdot x^{-3} \cdot x^4}{x^5 \cdot x^{-6}} = \frac{x^{2-3+4}}{x^{5-6}} = \frac{x^3}{x^{-1}} = x^{3-(-1)} = x^4$ / $x^{-5} = x^{5\cdot(-1)} = (x^5)^{-1} = \frac{1}{x^5} = \frac{1^5}{x^5} = \left(\frac{1}{x}\right)^5 = (x^{-1})^5 = x^{(-1)\cdot 5}$

Achtung: Unterscheiden sich sowohl Basis als auch Exponent, so kann man nicht alles zusammenfassen!
<u>Bsp:</u> $x^3y^2 \neq (xy)^5$ und $\neq (xy)^6$, allenfalls $= (xy)^2 \cdot x$, falls dies für einen Folgeschritt hilfreich ist.
Teilweises Radizieren (Wurzelziehen) ist ebenfalls ein Sonderfall der Potenzrechenregeln:
<u>Bsp:</u> $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = (16\cdot 2)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$ / $\sqrt{4x^2} = (4x^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{x^2} = 2\cdot|x|$

1. Bruchrechnung: Wiederholung wichtiger Methoden

a) Ein Bruch ist eine andere, meist praktischere Schreibweise für die Division. Achtung: Denk dir um Zähler und Nenner jeweils eine Klammer, und beachte das Distributivgesetz!
<u>Bsp:</u> $\frac{x+10}{5} \neq x + 10 : 5 = x + 2$ sondern $\frac{x+10}{5} = (x+10) : 5 = x : 5 + 10 : 5$

b) Ein Bruch ist nur dann definiert, wenn der Nenner ungleich Null ist. Bei Bruchtermen mit Variablen muss daher darauf geachtet werden, dass die Variablen bestimmte Werte nicht annehmen dürfen.
Ein Bruch hat genau dann den Wert Null, wenn der Zähler Null ist *und der Nenner ungleich Null ist*.
<u>Bsp:</u> $\frac{3}{x+2}$ ⇨ x darf nicht -2 sein / $\frac{x^2-4}{x+2}$ ⇨ Zähler wäre 0 für $x = \pm 2$, aber nur für $x = +2$ ist der Bruch definiert
<u>Bsp:</u> $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x - 2$ ⇦ die ursprüngliche Funktion hatte eine Definitionslücke bei $x = -2$, die nun behoben wurde. Es handelt sich also nun um eine andere Funktion als zuvor. Wenn wir die Funktion nicht verändern wollten, müssen wir als Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ angeben.

c) Erweitern / Kürzen: Der Wert des Bruchs bleibt gleich, wenn im Zähler und Nenner die gleiche Zahl multipliziert/dividiert wird. <u>Bsp:</u> $\frac{4}{5} = \frac{4\cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10} = \frac{4\cdot 3}{5\cdot 3} = \frac{12}{15}$ / $\frac{x}{x^3} = \frac{x : x}{x^3 : x} = \frac{1}{x^2}$ / $\frac{x+5}{3} = \frac{(x+5)\cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2x+10}{6}$
Hierfür sollte man das Faktorisieren üben: $\frac{36}{144} = \frac{4\cdot 9}{12 \cdot 12} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{4}$ / $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}$
Multiplikation/Division mit 10 ⇔ gleichsinnige Kommaverschiebung.
<u>Bsp:</u> $\frac{4{,}5}{0{,}09} = \frac{45}{0{,}9} = \frac{450}{9} = \frac{9\cdot 50}{9 \cdot 1} = \frac{50}{1} = 50$ / $\frac{120°}{360°} = \frac{12°}{36°} = \frac{12° \cdot 1}{12° \cdot 3} = \frac{1}{3}$ / $\frac{7{,}2\cdot 10^3}{5{,}4 \cdot 10^2} = \frac{72 \cdot 10^2}{54 \cdot 10} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6 \cdot 9} = \frac{8 \cdot 10}{6} = \frac{40}{3}$
<u>Bsp:</u> $\frac{6{,}022\cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}}{10^{-7} \cdot 0{,}5 \cdot 10^3} = \frac{6{,}022 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-23} \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}}{0{,}5} = 16{,}62072 \cdot 10^{23-23+7-3} = 16{,}62072 \cdot 10^4 = 166207{,}2$

d) Häufige Fehler (vor allem beim Rechnen mit Variablen):
• Wenn alle Faktoren aus dem Zähler oder Nenner gekürzt werden, bleibt immer noch 1 übrig, NICHT NULL!
<u>Bsp:</u> $\frac{2xy+4x^2y}{4x\cdot(1+2x)^2\cdot y^3} = \frac{2xy(1+2x)}{2\cdot 2x\cdot y^3\cdot(1+2x)^2} = \frac{1}{2\cdot y^2\cdot(1+2x)}$ / $\frac{x+y}{y} = \frac{(x+y):y}{y:y} = \frac{\frac{x}{y}+1}{1} = \frac{x}{y}+1$
• Aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen: $\frac{a+b}{a+a} \neq \frac{b}{a}$ sondern $\frac{a+b}{a+a} = \frac{a+b}{2\cdot a} = \frac{a}{2a} + \frac{b}{2a} = \frac{1}{2} + \frac{b}{2a}$

e) Addition/Subtraktion von Brüchen: Zunächst gleichnamig machen (Hauptnenner bilden), dann die Zähler addieren/subtrahieren, der Nenner bleibt der gemeinsame Hauptnenner!
Für die Hauptnennerbildung ist die Primfaktorzerlegung hilfreich.
<u>Bsp:</u> $\frac{5}{12} + \frac{5}{42} = \frac{5}{2\cdot 2\cdot 3} + \frac{5}{2\cdot 3\cdot 7} = \frac{5\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7} + \frac{5\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7} = \frac{35+10}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7} = \frac{45}{84}$
<u>Bsp:</u> $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} + \frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$
<u>Bsp:</u> $\frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{x} = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{1} + \frac{1}{x} = \frac{x^2\cdot x}{3\cdot x} - \frac{2x\cdot 3\cdot x}{1\cdot 3\cdot x} + \frac{1\cdot 3}{x\cdot 3} = \frac{x^3-6x^2+3}{3x}$

f) Aufteilen von Brüchen: Wenn im Zähler eine Summe/Differenz steht, so kann man den Bruch aufteilen.
Wenn im Nenner eine Summe/Differenz steht, geht dies NICHT.
<u>Bsp:</u> $\frac{h^2+3h-7}{h} = \frac{h^2}{h} + \frac{3h}{h} - \frac{7}{h} = \frac{h}{1} + \frac{3}{1} - \frac{7}{h} = h + 3 - \frac{7}{h}$ / $\frac{c^2}{c^2+c} \neq \frac{c^2}{c^2} + \frac{c^2}{c}$ sondern $\frac{c^2}{c^2+c} = \frac{c^2}{c\cdot(c+1)} = \frac{c}{c+1}$ (Ende!)

g) Multiplikation von Brüchen: Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner
<u>Bsp:</u> $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10} = \frac{5\cdot 3}{6\cdot 10} = \frac{5\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 5} = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$ / $\frac{x^2y}{z+1}\cdot\frac{(z^2-1)}{x} = \frac{x^2y(z^2-1)}{(z+1)\cdot x} = \frac{xy(z+1)(z-1)}{z+1} = \frac{xy(z-1)}{1} = xy(z-1)$

h) Multiplikation von Brüchen mit ganzen Zahlen oder Variablen: Die zu multiplizierende Zahl gehört in den Zähler.
<u>Bsp:</u> $3\cdot\frac{5}{12} = \frac{3\cdot 5}{12} = \frac{3\cdot 5}{3\cdot 4} = \frac{5}{4}$ / $\frac{p}{q}\cdot q^2 = \frac{p\cdot q^2}{q} = \frac{p\cdot q}{1} = pq$ / $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\cdot v^2 = m\cdot\frac{v^2}{2}$

i) Division von Brüchen: Durch einen Bruch teilt man, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert
<u>Bsp:</u> $\frac{1}{12} : \frac{3}{4} = \frac{1}{12}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{12\cdot 3} = \frac{4}{4\cdot 3\cdot 3} = \frac{1}{3\cdot 3} = \frac{1}{9}$ / $\frac{21}{14z-z^2} : \frac{14}{0{,}5z-7} = \frac{21\cdot(0{,}5z-7)}{(14z-z^2)\cdot 14} = \frac{3\cdot 7\cdot(0{,}5z-7)}{2\cdot 7\cdot z\cdot(14-z)} = \frac{3\cdot(0{,}5z-7)}{2z\cdot[-2(0{,}5z-7)]} = \frac{3}{-4z}$

j) Gemischte Brüche: Nicht verwechseln: $5\frac{3}{4} = 5 + \frac{3}{4} = \frac{5}{1} + \frac{3}{4} = \frac{20}{4} + \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$ aber $a\frac{3}{4} = a\cdot\frac{3}{4} = \frac{a\cdot 3}{4} = \frac{3a}{4}$
Lieber keine gemischten Brüche verwenden, sobald Variablen vorkommen!

k) Umwandlung Brüche ↔ Dezimalzahlen:
B → D: Wenn man durch Erweitern den Nenner auf 10, 100, 1000, … bringen kann, ist die Dezimalbruchdarstellung endlich. Dazu darf der Nenner (gekürzt) nur aus den Primfaktoren 2 und 5 bestehen. Enthält er noch andere Faktoren, so ergäbe sich der unendliche periodische Dezimalbruch, wenn man eine langwierige schriftliche Division ausführt. Hierzu darf man ruhigen Gewissens den Taschenrechner verwenden (Taste S⇔D).
<u>Bsp:</u> $\frac{5}{2} = \frac{5\cdot 5}{2\cdot 5} = \frac{25}{10} = 2{,}5$ / $\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 25}{4\cdot 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$ / $\frac{2}{5} = \frac{2\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{4}{10} = 0{,}4$ / $\frac{7}{8} = \frac{7\cdot 125}{8\cdot 125} = \frac{875}{1000} = 0{,}875$
D → B: Die Anzahl der Nachkommastellen entspricht der Anzahl Nullen hinter der 1 für die Zahl im Nenner.
<u>Bsp:</u> $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ / $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ / $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$ / $3{,}1415 = \frac{31415}{10000} = \frac{6283\cdot 5}{2000\cdot 5} = \frac{6283}{2000} = 3\frac{283}{2000}$

l) Potenzen: Wird ein Bruch potenziert, so muss man sowohl Zähler als auch Nenner entsprechend potenzieren. Dies gilt auch für gebrochene Exponenten (also Wurzeln).
<u>Bsp:</u> $\left(\frac{x}{y^2}\right)^2 = \frac{x^2}{(y^2)^2} = \frac{x^2}{y^4}$ / $\left(\frac{z^3}{\sqrt{y}}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{(z^3)^{\frac{2}{3}}}{\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{z^{3\cdot\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}} = \frac{z^2}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{z^2}{\sqrt[3]{y}}$

Achtung: Für das Potenzieren von SUMMEN gibt es keine einfache Methode! Handelt es sich um ein Quadrat von zwei Summanden, so können wir die binomischen Formeln verwenden, für alle übrigen Fälle müssen wir die Multiplikation ausschreiben und „jeder mit jedem“ multiplizieren!
<u>Bsp:</u> $\left(\frac{1}{4}+b\right)^2 \neq \left(\frac{1}{4}\right)^2 + b^2$ sondern $\left(\frac{1}{4}+b\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{4}\cdot b + b^2 = \frac{1}{16} + \frac{b}{2} + b^2 = \frac{1+8b+16b^2}{16}$
<u>Bsp:</u> $\left(\frac{1}{4}+b\right)^3 = \left(\frac{1}{4}+b\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}+b\right) = \left(\frac{1}{16}+\frac{b}{2}+b^2\right)\left(\frac{1}{4}+b\right) = \frac{1}{64} + \frac{b}{8} + \frac{b^2}{4} + \frac{b}{16} + \frac{b^2}{2} + b^3 = \frac{1}{64} + \frac{3b}{16} + \frac{3b^2}{4} + b^3$
<u>Bsp:</u> $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2+ab+ac + ab+b^2+bc + ac+bc+c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$

m) Negative Exponenten: Alles, was mit negativem Exponenten im Zähler steht, kann mit positivem Exponenten in den Nenner geschrieben werden und umgekehrt.
<u>Bsp:</u> $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ / $\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{z} = \frac{1}{z\cdot z^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{z^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} = z^{-\frac{3}{2}}$ / $\frac{7{,}2\cdot 10^3}{5{,}4\cdot 10^2} = \frac{7{,}2\cdot 10^3\cdot 10^{-2}}{5{,}4} = \frac{7{,}2\cdot 10^{3-2}}{5{,}4} = \frac{72}{54}\cdot 10 = \frac{8}{6}\cdot 10 = \frac{40}{3}$

n) Was haben Wurzeln mit Brüchen zu tun? Potenzrechengesetze!

Bsp: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ ⇨ $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$

Bsp: $x^a : x^b = x^{a-b}$ ⇨ $\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{2-\frac{3}{4}} = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}$

Bsp: $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$ ⇨ $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^6}} = \left(x^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$

o) Fortgeschrittenes Faktorisieren: Um erkennen zu können, ob man kürzen kann, d.h. ob Zähler und Nenner gemeinsame Faktoren haben, ist manchmal eine Polynomdivision nötig.

Bsp: $\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = ?$ ⇨ PD liefert $(x^3 - x_0^3) : (x - x_0) = x^2 + xx_0 + x_0^2$ ⇨ geht auf ohne Rest, kürzbar

Bsp: $\frac{x^3+1}{x+1} = ?$ ⇨ PD liefert $(x^3 + 1) : (x + 1) = x^2 + x - 1 + \frac{2}{x+1}$ ⇨ geht nicht auf, nicht kürzbar

2. Umformen von Gleichungen: Wiederholung wichtiger Methoden

a) Eine Gleichung besteht aus zwei Termen (linke Seite / rechte Seite) und einem Gleichheitszeichen dazwischen. Eine Gleichung kann wahr oder falsch sein.

Bsp: $3 = 3$ (w) / $\frac{3}{2} = 1{,}5$ (w) / $2 = 0$ (f) / $(-4)^2 = 16$ (w) / $x + 5 - x = 5$ (w)

b) Gleichungen, in denen Unbekannte (Variablen) vorkommen, können ebenfalls wahr oder falsch sein. Wir interessieren uns meistens dafür, welchen Wert die Variable(n) annehmen müsste(n), damit die Gleichung wahr ist.

Bsp: $x = 5$ ist dann (w), wenn x gleich 5 ist / $x^2 = 16$ ist dann (w), wenn x entweder +4 oder –4 ist

Bsp: $\sin x = 0$ ist dann (w), wenn x ein ganzzahliges Vielfaches von π ist, also $x = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bsp: $x = x$ ist immer (w), egal welchen Wert x annimmt, also $x \in \mathbb{R}$

Bsp: $x^2 = -1$ ist nie (w), egal welchen Wert x annimmt. Die Menge der Lösungen ist also leer: L = {}

c) Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist.

Bsp: $x \cdot (x - 5) \cdot (2x + 1) \cdot (x^2 + 3) = 0$ ist (w) für $x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = -\frac{1}{2}$, der letzte Faktor ist immer > 0

d) Äquivalenzumformungen: Führen wir auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselbe Äquivalenzumformung durch, so ändert sich der Zustand (w/f) der Gleichung dadurch nicht. Wir symbolisieren dies durch das Zeichen ⇔. Achtung: Nicht alle Rechenoperationen sind Äquivalenzumformungen! Es gibt welche, bei denen wir mögliche Lösungen der Gleichung verlieren oder bei denen wir neue hinzugewinnen können.

e) Bsp. für Äquivalenzumformungen:

Addition/Subtraktion einer Zahl/Variablen: $0 = 0$ (w) ⇔ $7 = 7$ (w) ⇔ $x + 7 = x + 7$ (w)

Multiplikation/Division einer Zahl/Variablen *ungleich Null*: $1 = 1$ (w) ⇔ $\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ (w) ⇔ $\frac{b}{5} = \frac{b}{5}$ (w)

Bildung des Kehrbruchs (wenn beide Seiten ungleich Null sind): $x = 5$ (w für $x = 5$) ⇔ $\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ (w für $x = 5$)

Bsp. für nicht äquivalente Umformungen, bei denen Lösungen hinzukommen oder verlorengehen:

Multiplikation mit Null: $3x = 3$ (w für $x = 1$) ⇎ $0 = 0$ (w für alle $x \in \mathbb{R}$)

Division durch eine Variable, die evtl. Null ist: $x^2 = x$ (w für $x = 1$ und $x = 0$) ⇎ $x = 1$ (w nur für $x = 1$)

Quadrieren: $x = 2$ (w für $x = 2$) ⇎ $x^2 = 4$ (w für $x = 2$ und $x = -2$)

Wurzelziehen: $x^2 = 4$ (w für $x = 2$ und $x = -2$) ⇎ $x = 2$ (w für $x = 2$)

Ableiten: $x^2 = x^2 + 4$ (f für alle $x \in \mathbb{R}$) ⇎ $2x = 2x$ (w für alle $x \in \mathbb{R}$)

f) Multiplizieren/Dividieren einer Gleichung durch einen Term $T(x)$:

Hierbei muss entweder sichergestellt sein, dass dieser Term nicht Null sein kann (z.B. durch die Aufgabenstellung / Definitionsmenge so vorgegeben), oder es muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden: Wenn $T(x) \neq 0$, dann kann durch $T(x)$ geteilt und weiter umgeformt werden. Wenn $T(x) = 0$ ist, dann ist dies eine neue Gleichung, mit deren Hilfe evtl. eine weitere Lösung gefunden werden kann.

Bsp: $x^3 + 10x^2 + 25x = 0$ Fall 1: $T(x) = x \neq 0$ ⇨ Division durch x ⇨ $x^2 + 10x + 25 = 0$ ⇔ $(x+5)^2 = 0$ ⇔ $x = -5$

Fall 2: $T(x) = x = 0$ ⇨ dies ist bereits eine weitere Lösung der Gleichung

Bsp: $\frac{x^2+6x+5}{x^2-1} = 0$ Fall 1: $T(x) = x^2-1 \neq 0$, also $x \neq 1$ und $x \neq -1$ ⇨ Multiplikation mit (x^2-1) ⇨ $x^2+6x+5 = 0$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot 5}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{16}}{2} = \begin{cases} -1 & \text{(verboten in Fall 1)} \\ -5 & \text{(erlaubt, einzige Lsg.)} \end{cases}$$

Fall 2: $T(x) = x^2-1 = 0$ ⇔ $x = \pm 1$, in diesem Fall ist die li.Seite nicht definiert und somit kann die Gleichung nicht wahr sein.

g) Quadrieren einer Gleichung:
Hierbei können zusätzliche Lösungen entstehen, die die ursprüngliche Gleichung nicht erfüllen (Bsp. s.o.).
Wir können normal weiterrechnen und müssen nur daran denken, am Ende unsere gefundene(n) Lösung(en) zur Probe noch einmal in die ursprüngliche Gleichung einzusetzen und ggf. zu verwerfen.

Bsp: $\sqrt{x-7} = x-9 \;\Rightarrow\; x-7 = x^2-18x+81 \;\Leftrightarrow\; x^2-19x+88 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \begin{cases} 8 \\ 11 \end{cases}$

Probe: $\sqrt{8-7} = \sqrt{1} = 1$, aber $8-9 = -1$ $\Rightarrow x_1 = 8$ ist keine Lösung
$\sqrt{11-7} = \sqrt{4} = 2$, und $11-9 = 2$ $\Rightarrow x_2 = 11$ ist eine Lösung der ursprünglichen Gleichung

h) Wurzelziehen auf beiden Seiten einer Gleichung:
Die Wurzel liefert nur die *positive* Lösung einer quadratischen Gleichung. Damit wir die negative Lösung nicht verlieren, müssen wir beim Wurzelziehen immer zwei Fälle betrachten, d.h. vor die Wurzel ein ± setzen.

Bsp: $x^2 - 12x + 36 = 25 \;\Leftrightarrow\; (x+6)^2 = 25 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} + 6 = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \pm 5 - 6 = \begin{cases} -1 \\ -11 \end{cases}$

oder $|x_{1,2} + 6| = \sqrt{25} = 5$ und dann Fallunterscheidung beim Betrag

i) Jede Gleichung lässt sich durch Subtraktion aller Terme einer Seite so umformen, dass auf dieser Seite 0 steht. Kommt nur eine Variable x vor, so lässt sich die andere Seite als eine Funktion $f(x)$ auffassen. Wir suchen nun alle Werte x, für die die Gleichung $f(x)=0$ wahr ist. Dies entspricht also der Suche nach den Nullstellen einer Funktion.

j) Typen von Funktionen:
- Konstante Funktion: $f(x) = c$
- Quadratische Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Lineare Funktion: $f(x) = mx + t$
- Potenzfunktion: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$
- Betragsfunktion: $f(x) = |x|$
- Wurzelfunktion: $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ mit $p,q \in \mathbb{Z}$
- Ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) n.Ordnung: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$
- Gebrochenrationale Funktion: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome vom Grad z bzw. n sind
- Exponentialfunktion: $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ (Spezialfall: natürliche Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$)
- Logarithmusfunktion: $f(x) = \log_a x$ mit $a > 0$ (Spezialfall: natürliche Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$)
- Trigonometrische Funktionen: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$
- … sowie Kombinationen durch Addition/Subtraktion/Multiplikation/Division/Verkettung dieser Typen

3. Typen von Gleichungen und Lösungsverfahren

a) Lineare Gleichungen: Kommt die Unbekannte x nur linear vor, also nicht als x^2, x^3, … oder $\sqrt{x}$ $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$, $x^{\frac{1}{3}}$, …, so löst man die Gleichung indem man zunächst alle Klammern ausmultipliziert, dann alle Terme mit x durch Addition/Subtraktion auf eine Seite der Gleichung bringt und alle anderen auf die andere Seite, dann zusammenfasst und x ausklammert, durch den Faktor beim x teilt und ggf. nochmal zusammenfasst (kürzt).

Bsp: $3x - 8 - 6b = b\cdot(4 - 5x) - 2 \;\Leftrightarrow\; 3x - 8 - 6b = 4b - 5bx - 2 \;\Leftrightarrow\; 3x + 5bx = 6b + 4b - 2 + 8$
$\Leftrightarrow\; x\cdot(3 + 5b) = 10b + 6 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{10b+6}{3+5b} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2\cdot(5b+3)}{5b+3} \;\Leftrightarrow\; x = 2$

Achtung: $(x + 5)\cdot(x - 1) = 2$ ist keine lineare Gleichung, sondern eine quadratische (Ausmultiplizieren!)

b) Bruchgleichungen: Kommt die Unbekannte x auch irgendwo im Nenner vor, so bildet man zunächst den Hauptnenner aller beteiligten Brüche und multipliziert die Gleichung mit diesem. Dadurch verschwinden alle Brüche und es ergibt sich eine lineare Gleichung (oder eine quadratische oder noch höhere Ordnung; siehe dort).

Bsp: $\frac{5}{2x+2} = \frac{7}{2x} \;\Leftrightarrow\; \frac{5\cdot x}{2(x+1)\cdot x} = \frac{7\cdot(x+1)}{2\cdot x\cdot(x+1)} \;\Leftrightarrow\; 5x = 7(x+1) \;\Leftrightarrow\; 5x = 7x + 7 \;\Leftrightarrow\; 5x - 7x = 7 \;\Leftrightarrow\; -2x = 7 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{7}{2}$

Achtung: Hierbei muss überprüft werden, dass die gefundene Lösung auch die ursprüngliche Gleichung erfüllt und nicht eine Nullstelle eines Nenners war (siehe 2e)).

Bsp: $\frac{2x}{x-1} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x-1} \;\Leftrightarrow\; \frac{2x^2}{(x-1)\cdot x} + \frac{2\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot x} = \frac{2\cdot x}{x\cdot(x-1)} \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + 2x - 2 = 2x \;\Leftrightarrow\; 2x^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 1$

Aber $x = 1$ löst die ursprüngliche Gleichung nicht! Also ist $x = -1$ die einzige Lösung.

c) Potenzgleichung: n-te Wurzel ziehen (= mit dem Kehrwert des Exponenten potenzieren)

Bsp: $x^5 = \frac{1}{32} \;\Leftrightarrow\; x = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{1}{2}$ / $(x-7)^{\frac{3}{2}} = -27 \;\Leftrightarrow\; x - 7 = (-27)^{\frac{2}{3}} = (-3)^2 \;\Leftrightarrow\; x = 9$

Ungerade Potenzen von x können negativ sein (dann war auch x negativ). Gerade Potenzen von x müssen positiv sein, dafür kann x sowohl positiv als auch negativ gewesen sein, es gibt zwei Lösungen.

d) Wurzelgleichung: Die Wurzel *allein* auf eine Seite der Gleichung bringen, dann potenzieren, dann weiter auflösen. Solange ein weiterer Summand neben der Wurzel vorkommt, führt Potenzieren zu gemischten Termen, die immer noch Wurzeln enthalten (vgl. binomische Formeln): $\left(\sqrt{x}+3\right)^2=\sqrt{x}^2+2\cdot3\cdot\sqrt{x}+3^2=x+6\sqrt{x}+9$

Bsp: $\sqrt{60{,}5\,x}+2x=3 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{60{,}5\,x}=3-2x \;\Leftrightarrow\; 60{,}5\,x=(3-2x)^2=9-12x+4x^2$

$\Leftrightarrow\; 4x^2-72{,}5\,x+9=0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}=\frac{72{,}5\pm\sqrt{5256{,}25-144}}{8}=\frac{72{,}5\pm71{,}5}{8}=\begin{cases}\frac{1}{8}\\18\end{cases}$

e) Quadratische Gleichungen: Mitternachtsformel $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, oder bei einfacheren Sonderfällen:

- $c = 0$ ⇨ Ausklammern von x ist möglich: $ax^2+bx=0 \;\Leftrightarrow\; x(ax+b)=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=0,\; x_2=-\frac{b}{a}$
- $b = 0$ ⇨ Umformung zu $x^2=-\frac{c}{a}$ und dann Wurzelziehen (geht natürlich nur, wenn $-\frac{c}{a}$ positiv ist)
- $a = 1$, ganzzahlige NS n, m ⇨ Satz von Vieta: $(x-n)(x-m)=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-(n+m)x+nm=0$
  ⇨ c muss das Produkt der NS sein und b die (negative) Summe der NS.
- Die Gleichung liegt bereits faktorisiert vor oder lässt sich leicht faktorisieren (z.B. binomische Formel)

Bsp: $2x^2-32=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=16 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}=\pm4$ / $5x^2+10x=0 \;\Leftrightarrow\; 5x(x+2)=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=0,\; x_2=-2$

Bsp: $x^2+5x-14=0 \;\Leftrightarrow -14=2\cdot(-7)=(-2)\cdot7$ und $-5=2-7 \Leftrightarrow\; x_1=-7,\; x_2=2,\; (x+7)(x-2)=0$

Bsp: $x^2+24x+144=0 \;\Leftrightarrow\;$ bin.F. $(x+12)^2=0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}=-12$

Bsp: $3x^2-4x+5=0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-60}}{6}=\lightning$ (keine Lösung, da Radikand (Diskriminante) negativ)

f) Polynome höheren Grades: „Raten" einer Nullstelle x_1, Polynomdivision durch $(x-x_1)$ / einfachere Sonderfälle:

- $a_0 = 0$ ⇨ Ausklammern von x ist möglich, dann ist $x_1 = 0$ eine NS
- Grad 4 mit nur geraden Potenzen („biquadratische Gleichung") ⇨ Substitution $u := x^2$ und somit Reduktion auf quadratische Gleichung mit Lösungen u_1, u_2, dann Resubstitution $x_{1,2}^2=u_1,\; x_{3,4}^2=u_2$ und somit $x_{1,2}=\pm\sqrt{u_1}\ldots$

Bsp: $x^5-8x^4+4x^3=0 \;\Leftrightarrow\; x^3(x^2-8x+4)=0 \;\Leftrightarrow\; x^3(x-2)^2=0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2,3}=0,\; x_{4,5}=2$

Bsp: $x^4-3x^2+2=0 \;\Leftrightarrow\; u^2-3u+2=0 \;\Leftrightarrow\; (u-1)(u-2)=0 \;\Leftrightarrow\; u_1=1,\, u_2=2 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}=\pm1,\; x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$

Bsp: $x^3-x^2-9x+9=0 \;\Leftrightarrow\;$ geraten: $x_1=1$, Polynomdivision $(x^3-x^2-9x+9):(x-1)=x^2-9 \;\Leftrightarrow\; x_{2,3}=\pm3$

g) Exponentialgleichung: x kommt nur im Exponenten vor

- Logarithmieren. Dies funktioniert nur, wenn beide Seiten der Gleichung aus einem Produkt bestehen und x nur als direkter Exponent der Faktoren auftaucht, da sich der Logarithmus einer Summe nicht weiter vereinfachen lässt.

Bsp: $e^{-\frac{x^2}{4}}=0{,}5 \;\mid \ln() \;\Leftrightarrow\; -\frac{x^2}{4}=\ln0{,}5=\ln\frac{1}{2}=-\ln2 \;\Leftrightarrow\; x^2=4\cdot\ln2 \;\Leftrightarrow\; x=\pm2\sqrt{\ln2}$

Bsp: $3^{2x}=81\cdot9^{\frac{x}{2}} \;\mid \log_3() \;\Leftrightarrow\; 2x=\log_3 81+\frac{x}{2}\log_3 9=4+\frac{x}{2}\cdot2=4+x \;\Leftrightarrow\; x=4$

Bsp: $3^{2x}=81+9^{\frac{x}{2}} \;\Leftrightarrow\; 3^{2x}-9^{\frac{x}{2}}=81 \;\Leftrightarrow\; 3^{2x}-3^x=81 \;\Leftrightarrow\; 3^x(3^x-1)=3^4 \;\mid \log_3()$

$\Leftrightarrow\; x+\log_3(3^x-1)=4$ nicht weiter umformbar, aber die Gleichung ist durch Substitution lösbar:

- Substitution: Kommt die gleiche Basis a sowohl hoch x als auch hoch $2x$ oder $-x$ vor ⇨ Substitution $u := a^x$

Bsp: $3^{2x}-3^x=81 \;\Leftrightarrow\; u^2-u=81 \;\Leftrightarrow\; u^2-u-81=0 \;\Leftrightarrow\; u_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+324}}{2}=\frac{1\pm5\sqrt{13}}{2} \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}=\log_3\left(\frac{1\pm5\sqrt{13}}{2}\right)$

Bsp: $49\cdot7^x+7^{-x}=14 \;\Leftrightarrow\; 49u+\frac{1}{u}=14 \;\Leftrightarrow\; 49u^2+1-14u=0 \;\Leftrightarrow\; (7u-1)^2=0 \;\Leftrightarrow\; u=\frac{1}{7}=7^{-1} \;\Leftrightarrow\; x=\log_7 7^{-1}=-1$

h) Logarithmusgleichung: Man nimmt beide Seiten der Gleichung als Exponent zu einer passenden Basis a

Bsp: $\log_9 x-\log_9 2=\log_3 2 \;\Leftrightarrow\; \log_9\frac{x}{2}=\log_3 2 \;\mid 9^{\bullet} \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{2}=9^{\log_3 2} \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{2}=(3^2)^{\log_3 2}=\left(3^{\log_3 2}\right)^2=2^2=4 \;\Leftrightarrow\; x=8$

i) Trigonometrische Gleichung: Meist kompliziert. Nur Spezialfälle sind analytisch lösbar; dazu sollte man die Nullstellen und die Periodizität von Sinus und Cosinus kennen (Einheitskreis), sowie die Umrechnungsformeln
$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x},\; \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x},\; \sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\; \cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Bsp: $\sin x=\cos x \;\Leftrightarrow\; \frac{\sin x}{\cos x}=1 \;\Leftrightarrow\; \tan x=1 \;\Leftrightarrow\; x=\tan^{-1}1=45^\circ$ oder 225° (Einheitskreis!)

Bsp: $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \sin x\cdot\sqrt{1-\sin^2 x}=\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)=\frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; \sin^2 x-\sin^4 x=\frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; u-u^2=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\; u^2-u+\frac{1}{4}=0 \;\Leftrightarrow\; \left(u-\frac{1}{2}\right)^2=0 \;\Leftrightarrow\; u=\frac{1}{2}=\sin^2 x \;\Leftrightarrow\; \sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; x=\begin{cases}\sin^{-1}\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=45^\circ \text{ oder } 135^\circ\\ \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=225^\circ \text{ oder } 315^\circ\end{cases}$

Bsp: $\sin x+\cos(x+90^\circ)=0 \;\Leftrightarrow\; \sin x+\cos\big(180^\circ-(x+90^\circ)\big)=0 \;\Leftrightarrow\; \sin x+\cos(90^\circ-x)=0$

$\Leftrightarrow\; \sin x+\sin x=0 \;\Leftrightarrow\; 2\sin x=0 \;\Leftrightarrow\; \sin x=0 \;\Leftrightarrow\; x=k\cdot180^\circ,\; k\in\mathbb{Z}$

Bsp: $\sin x=x^2$ Diese Gleichung ist *nicht* analytisch lösbar. Durch „Probieren" findet man *eine* Lösung: $x_1 = 0$
Die zweite Lösung findet man nur numerisch oder graphisch näherungsweise: $x_2 \approx 0{,}8767$